SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Sergio Polidoro

TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE E DI UNICITÁ PER LE SOLUZIONI DI EQUAZIONI DI TIPO FOKKER-PLANCK

27 gennaio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. Si considerano operatori parabolici degeneri del tipo seguente

$$L = \operatorname{div}(A(x,t)D) + < x, BD > -\partial_t,$$

ove B è una matrice costante, $A(z) = A^T(z) \geq 0$. Adattando un metodo noto per gli operatori parabolici classici, basato sostanzialmente su precise stime puntuali della solizione fondamentale di L, si dimostra che se u è soluzione di $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0,T[$ e $u(x,0) = 0$, allora una qualunque delle seguenti condizioni:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2} |u(x,t)| dx \Big) dt < \infty$$

per un opportuna costante $c > 0$, oppure

$$\text{(b)} \qquad u \geq 0,$$

implica $u \equiv 0$.

Vengono inoltre forniti un risultato di rappresentazione ed un teorema di tipo Fatou per le soluzioni non negative di $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0,T[$.

Abstract. We consider a class of degenerate parabolic operators of the following type

$$L = \operatorname{div}(A(x,t)D) + < x, BD > -\partial_t,$$

where B is a constant matrix, $A(z) = A^T(z) \geq 0$. We show that if u is a solution of $Lu = 0$ on $\mathbb{R}^N \times]0,T[$ and $u(x,0) = 0$, then each of the following conditions:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2} |u(x,t)| dx \Big) dt < \infty$$

for some $c > 0$, or

$$\text{(b)} \qquad u \geq 0,$$

implies $u \equiv 0$. We use a technique wich is well known in the classical parabolic case and wich relies on some pointwise estimates of the fundamental solution of L.

Next, we prove a representation theorem and a Fatou type theorem for non-negative solutions of $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0,T[$.

Section 4 contains a more detailed summary of this work.

§1. Introduzione e richiami. In $\mathbb{R}^{N+1}$ consideriamo l'operatore differenziale

$$Lu = \operatorname{div}(A(z)Du) + < x, BDu > -\partial_t u, \tag{1.1}$$

ove $z = (x,t)$ indica il punto di $\mathbb{R}^{N+1}, D, < \cdot, \cdot >$ e div indicano, rispettivamente, il gradiente, il prodotto interno e la divergenza in $\mathbb{R}^N$, $A(z), B$ sono matrici reali $N \times N$, B costante. Supporremo sempre verificate le seguenti ipotesi:

i) rispetto ad una base di $\mathbb{R}^N$ $A(z)$ si scrive nel modo seguente:

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

con $A_0(z)$ matrice $p_0 \times p_0, 1 \leq p_0 \leq N$, tale che, per ogni $z \in\mathbb{R}^{N+1}$ risulti

$$\mu^{-1} I_{p_0} \leq A_0(z) \leq \mu I_{p_0}, \tag{1.3}$$

con I_{p_0} matrice identità in $\mathbb{R}^{p_0}$ e $\mu > 0$;

ii) esiste $\zeta \in\mathbb{R}^{N+1}$ tale che l'operatore

$$L_\zeta u = \operatorname{div}(A(\zeta)Du) + < x, BDu > -\partial_t u \tag{1.4}$$

è ipoellittico;

iii) esiste un gruppo di dilatazioni $(\lambda^M)_{\lambda>0}$, con M matrice simmetrica e definita positiva in $\mathbb{R}^{N+1}$, rispetto a cui l'operatore L_ζ è invariante, nel senso che

$$L_\zeta \circ \lambda^M = \lambda^2 \left(\lambda^M \circ L_\zeta\right) \quad \forall \lambda > 0.$$

In questo seminario dimostreremo alcuni risultati di unicità e di rappresentazione per le soluzioni del problema di Cauchy sull'insieme $S_I = \mathbb{R}^N \times I$, con I intervallo limitato di $\mathbb{R}$, relativo all'operatore L definito in (1.1). Tali risultati estendono quelli relativi agli operatori parabolici classici (cfr. [K], [A1], [A2], [T]) e si basano sostanzialmente sulle proprietà della soluzione fondamentale di L.

Ricordiamo che questo metodo è già stato utilizzato da Scornazzani in [S], per l'equazione di Kolmogorov in tre dimensioni $L = \partial_x (a(x,y,t)\partial_x) + x\partial_y - \partial_t$, che costituisce un prototipo degli operatori (1.1). La conoscenza di precise stime puntuali della soluzione fondamentale di cui ora disponiamo (almeno sotto alcune ipotesi minime di regolarità sui coefficienti della matrice $A(z)$, vedi [P1]; per la prova completa dei risultati citati vedi anche [P2] e [P3]), consentono di estedere tale procedimento a tutti gli operatori (1.1), in perfetta analogia con il caso parabolico classico. Tale analogia si manifesta anche nei risultati, in quanto le classi di unicità individuate per gli operatori L coincidono con le stesse classi corrispondenti all'equazione del calore $\Delta_x + \partial_t$. Infatti nel paragrafo 2 dimostriamo che se u è soluzione di $Lu = 0$ sull'insieme $S_I = \mathbb{R}^N \times]0,T[$ e $u(x,0) = 0$, allora u è necessariamente nulla, se (in un senso opportuno) si domina con una funzione del tipo $e^{c|x|^2}$ (Teorema 2.1), oppure se $u \geq 0$ (Teorema 2.2). L'esempio di Tychonov [T] assicura che la crescita esponenziale sopra indicata è ottimale, almeno nelle variabili in cui la matrice $A(z)$ in (1.2) è non degenere. Attualmente non è chiaro se esistano o

meno classi di unicità più ampie, che distinguano le variabili spaziali "principali" (le prime p_0) da quelle "complementari" (le restanti $N - p_0$). Osserviamo invece che la classe di unicità del Teorema 2.2 è estremamente significativa, in quanto, come dimostrò Kolmogorov, la densità di probabilità di certi processi aleatori è una soluzione non negativa di un'equazione differenziale del tipo (1.1) (cfr. [Sh], pag. 167).

Nel paragrafo 3 si dimostra che per ogni soluzione non negativa u di $Lu = 0$ nell'insieme $S_I = \mathbb{R}^N \times]0, T[$, esiste una misura di Borel $\rho \geq 0$ tale che, per ogni $(x,t) \in S_I$ risulta

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0) d\rho(\xi),$$

ove Γ è la soluzione fondamentale di L. Inoltre, se $\varphi(x)dx$ è la parte assolutamente continua della misura ρ rispetto alla misura di Lebesgue, con un procedimento introdotto da Kato [K], dimostriamo che risulta

$$\lim_{t \to 0+} u(x,t) = \varphi(x), \tag{1.5}$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Più precisamente, utilizzando un teorema di ricoprimento di tipo Vitali (Lemma 3.1), relativo a famiglie di insiemi modellati sulla geometria naturale dell'operatore L, mostriamo che (1.5) vale in tutti i punti di $\mathbb{R}^N$ che sono di Lebesgue per la funzione φ relativamente alla precedente famiglia di insiemi (Proposizione 3.1).

Viene infine fornito un ulteriore risultato di unicità per soluzioni non ngative di $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ tali che $u(\cdot, t) \xrightarrow{\text{deb}} 0$ per $t \to 0+$ (Corollario 3.1).

Completiamo ora l'elenco delle ipotesi sull'operatore L.

Ipotesi A. *Esiste la soluzione fondamentale Γ di L, con le seguenti usuali proprietà:*

i) *Per ogni funzione $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\lim_{t \to s+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,s)\varphi(y)dy = \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.6}$$

ii) *vale la proprietà di riproduzione: per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N, \tau < s < t$, risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,s)\Gamma(y,s;\xi,\tau)dy = \Gamma(x,t;\xi,\tau), \tag{1.7}$$

iii) *se indichiamo con Γ^* la soluzione fondamentale dell'operatore L^* aggiunto di L, risulta*

$$\Gamma^*(z;w) = \Gamma(w;z). \tag{1.8}$$

Ipotesi B. *Esiste una costante positiva $\lambda > 0$ tale che, se indichiamo con Γ^+ e Γ^- le soluzioni fondamentali rispettivamente di*

$$L^+ = \lambda \Delta_{p_0} + < x, BD > -\partial_t,$$

e

$$L^- = \lambda^{-1} \Delta_{p_0} + < x, BD > -\partial_t,$$

allora per ogni $T > 0$ esistono due costanti $c^+, c^- > 0$ tali che:

$$\begin{aligned} & c^-\Gamma^-(z,\zeta) \leq \Gamma(z,\zeta) \leq c^+\Gamma^+(z,\zeta) \\ & \left|\partial_{x_i}\Gamma(z,\zeta)\right| \leq \frac{c^+}{\sqrt{t-\tau}}\,\Gamma^+(z,\zeta) \end{aligned} \tag{1.9}$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}, 0 < t - \tau < T$ e per ogni $i = 1, ..., p_0$.

Osservazione 1.1. *Le Ipotesi A e B sono tutte verificate se i coefficienti $a_{i,j}(z)$ della matrice $A(z)$ in (1.2) e le loro derivate $\partial_{x_i} a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq p_0$ sono uniformemente hölderiani su ogni fissato insieme $S_I = \mathbb{R}^N \times I$, con I intervallo limitato di $\mathbb{R}$ (cfr. [P2], Teorema 1.1, Corollario 2.5, Proposizione 4.1, Lemma 2.2 e il Teorema principale di [P3]).*

Osservazione 1.2. *Qui e nel seguito, affermando che "una funzione u è soluzione" di $Lu = 0$, intendiamo implicitamente che u ha tutte le derivate $\partial_{x_i}, \partial^2_{x_i,x_j} (1 \leq i, j \leq p_0), Y = < x, BD > -\partial_t$ continue.*

Le stime (1.9) sono particolarmente significative in quanto le soluzioni fondamentali Γ^+ e Γ^- si scrivono in termini espliciti.

Richiamiamo ora alcuni risultati, tutti contenuti in [LP], relativi agli operatori (1.1) con parte caratteristica a coefficienti costanti:

Richiami. *Supponiamo la matrice $A(z) = A$ a coefficienti costanti e poniamo*

$$E(t) = \exp(-tB^T) \qquad C(t) = \int_0^t E(s)AE^T(s)ds. \tag{1.10}$$

Risulta allora:

i) *l'operatore L è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra del gruppo $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ con l'operazione "$\circ$" così definita:*

$$(x,t) \circ (\xi, \tau) = (\xi + E(\tau)x, t + \tau), \quad (x,t), (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{1.11}$$

In particolare risulta

$$\Gamma(z;\zeta) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z; 0) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}, \; z \neq \zeta; \tag{1.12}$$

ii) *l'ipoellitticità dell'operatore L è equivalente alla seguente condizione:*

$$C(t) > 0 \qquad \text{per ogni } t > 0; \tag{1.13}$$

iii) *rispetto ad una opportuna base di* $\mathbb{R}^N$ *la matrice* λ^M *delle dilatazioni che commutano con* L *assume la seguente espressione:*

$$\lambda^M = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, ..., \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2), \tag{1.14}$$

per opportuni interi positivi p_j *tali che* $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_r \geq 1$ e $p_0 + p_1 + ... + p_r = N$. *Nel seguito indicheremo con* $D(\lambda)$ *la restrizione di* λ^M *ad* $\mathbb{R}^N$*:*

$$D(\lambda) = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, ..., \lambda^{2r+1} I_{p_r}), \tag{1.15}$$

iv) *valgono le seguenti identità: per ogni* $t, \lambda > 0$ *si ha*

$$\begin{aligned} E\left(\lambda^2 t\right) &= D(\lambda) E(t) D\left(\frac{1}{\lambda}\right), \\ C\left(\lambda^2 t\right) &= D(\lambda) C(t) D(\lambda), \end{aligned} \tag{1.16}$$

v) *la soluzione fondamentale di* L *si scrive nel modo seguente:*

$$\Gamma(x,t) = \frac{c}{t^{\frac{Q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(1) D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) x, D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) x >\right), \tag{1.17}$$

ove $Q = p_0 + 3p_1 + ... + (2r+1)p_r$ *è la dimensione omogenea di* $\mathbb{R}^N$ *rispetto a* $D(\lambda)$.

Concludiamo l'introduzione enunciando alcuni risultati che si provano per gli operatori del tipo (1.1) esattamente come per gli operatori parabolici classici.

Principio di massimo. *Se* $Lu \geq 0$ *in* $S_I = \mathbb{R}^N \times]0, T[$ *e se*

$$\limsup_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) \leq 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N,$$
$$\limsup_{|x|\to\infty} \left(\sup_{t\in I} u(x,t)\right) \leq 0,$$

allora $u \leq 0$ *in* S_I.

Stime a priori interne. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^{N+1}$. *Indichiamo con* ∂ *una qualunque delle seguenti derivate:* $\partial_{x_i}, \partial^2_{x_i,x_j}, Y = < x, BD > -\partial_t, 1 \leq i,j \leq p_0$. *Allora, per ogni compatto* $K \subset \Omega$ *esiste una costante* $c > 0$ *tale che, per ogni* u *soluzione di* $Lu = 0$ *in* Ω, *risulta*

$$\sup_K |\partial u| \leq c \sup_K |u|. \tag{1.18}$$

§2. Teoremi di unicità. Lo scopo principale di questo paragrafo è la prova dei seguenti risultati:

Teorema 2.1. *Sia $u \in C(\overline{S_I})$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } S_I, \\ u(\cdot, 0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Allora, se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\int_{S_I} e^{-c|x|^2} |u(x,t)| dx dt < \infty, \tag{2.2}$$

risulta $u \equiv 0$ in S_I.

Teorema 2.2. *Sia $u \in C(\overline{S_I})$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } S_I, \\ u(\cdot, 0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Allora, se $u \geq 0$, risulta $u \equiv 0$ in S_I.

Dimostriamo innanzitutto il seguente

Lemma 2.1. *Sia C una matrice costante $N \times N$, simmetrica e definita positiva. Sia poi $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ fissato. Allora esistono una costante $c_0 > 0$, che dipende solo dalle matrici B e C, ed una costante $R = R(x) > 0$ tali che*

$$\begin{aligned} &< C\eta, \eta > \geq \frac{c_0}{s} |\xi|^2, \\ &\eta = D\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)(x - E(s)\xi) \end{aligned} \tag{2.3}$$

per ogni $(\xi, s) \in B'_R(x) \times]0,1[= (\mathbb{R}^N \setminus B_R(x)) \times]0,1[$, ove $B_R(x)$ è la sfera (euclidea) di centro x e raggio R.

Dimostrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= E^T(1) C E(1), \\ \tilde{\eta} &= D\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)(\xi - E(-s)x). \end{aligned}$$

Per la prima delle identità (1.16) si ha

$$< C\eta, \eta > = < \widetilde{C}\tilde{\eta}, \tilde{\eta} >,$$

e, a causa della (1.15),

$$< \widetilde{C}\tilde{\eta}, \tilde{\eta} > \geq c|\tilde{\eta}|^2 \geq \frac{c}{s}|\xi - E(-s)x|^2 \geq \frac{c}{s}(|\xi| - |E(-s)x|)^2.$$

Resta quindi provato il Lemma se scegliamo $c_0 = c/4$ e

$$R \geq 2 \sup_{0<s<1} |E(-s)x|.$$

Dimostrazione del Teorema 2.1. Sia φ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$, decrescente e tale che $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \geq 2$, $\varphi(t) = 1$ per ogni $t \leq 1$. Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ poniamo poi, per ogni $R > 0$

$$h_R(x) = \varphi\left(\frac{|x-\bar{x}|}{R}\right). \tag{2.4}$$

Osserviamo preliminarmente che per ogni $i \leq N$, risulta

$$\operatorname{supp}(\partial_{x_i} h_R) \subset B_{2R}(\bar{x}) \backslash B_R(\bar{x}), \qquad \left|\partial_{x_i} h_R(x)\right| \leq \frac{c_1}{R},$$

e quindi $\left|Y h_R\right| \leq c_2$ per ogni $R > 0$. Di conseguenza $L^* h_R$ è una funzione *limitata* uniformemente per $R \geq 1$.

Sia ora $\delta \in]0,T], \delta \leq 1$ fissato e indichiamo con S_I' l'insieme $\mathbb{R}^N \times]0,\delta[$. Utilizzando l'identità di Green e procedendo in maniera standard si prova che, per ogni $\bar{z} = (\bar{x},\bar{t}) \in S_I'$ risulta

$$u(\bar{z}) = \int_0^{\bar{t}} \left(\int_{B_R'(\bar{x})} \left(\Gamma L^* h_R + 2 < A(\xi,\tau) D\Gamma, D h_R > \right) u(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau, \tag{2.5}$$

ove $B_R'(\bar{x}) = \mathbb{R}^N \backslash B_R(\bar{x})$. Utilizzando le stime (1.9) dell'Ipotesi B ed applicando il Lemma 2.1 alla matrice $C^+(1)$ definita in (1.10), relativa all'operatore L^+, si ha allora, se R è abbastanza grande,

$$\begin{aligned} |u(\bar{z})| \leq & c_3 \int_0^{\bar{t}} \left(\int_{B_R'(\bar{x})} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{t}-\tau}}\right) \Gamma^+(\bar{z};\xi,\tau) |u(\xi,\tau)| d\xi \right) d\tau \leq \\ \leq & c_3' \int_0^{\bar{t}} \left(\int_{B_R'(\bar{x})} (\bar{t}-\tau)^{-\frac{Q+1}{2}} \exp\left(-c_0 \frac{|\xi|^2}{4(\bar{t}-\tau)}\right) |u(\xi,\tau)| d\xi \right) d\tau. \end{aligned}$$

Scegliamo ora $\delta = \min\left\{\frac{c_0}{8c}, 1\right\}$ (ove c è la costante che compare in (2.2)). Essendo la funzione $(\xi,\tau) \mapsto (\bar{t}-\tau)^{-\frac{Q+1}{2}} \exp\left(-c_0 \frac{|\xi|^2}{8(\bar{t}-\tau)}\right)$ limitata su $B_R'(\bar{x}) \times I$, risulta

$$|u(\bar{z})| \leq c_4 \int_0^{\bar{t}} \left(\int_{B_R'(\bar{x})} e^{-c|\xi|^2} |u(\xi,\tau)| d\xi \right) d\tau. \tag{2.6}$$

D'altra parte per la (2.2)

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\bar{t}} \left(\int_{B_R'(\bar{x})} e^{-c|\xi|^2} \left|u(\xi,\tau)\right| d\xi \right) d\tau = 0 \tag{2.7}$$

e quindi $u(\bar{z}) = 0$ per ogni $\bar{z} \in S_I'$. Poiché δ dipende solo dalla costante c in (2.2) e dall'operatore L, la prova del Teorema si completa iterando il procedimento.

Lemma 2.2. *Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in S_I, continua su $\overline{S_I}$. Allora, per ogni $z = (x,t) \in S_I$ e per ogni $\tau \in I, \tau < t$, risulta*

$$u(z) \geq \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi. \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Fissato $\tau \in I, \tau < t$, poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}, h_n(\xi) = \varphi\left(\frac{|\xi|}{n}\right)$ (cfr. (2.4)),

$$f_n(\xi,\tau) = h_n(\xi)u(\xi,\tau)$$

e

$$U_n(z;\tau) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\xi,\tau)f_n(\xi,\tau)d\xi. \tag{2.9}$$

Allora $LU_n(\cdot\,;\tau) = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]\tau,T[$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{(x,t)\to(y,\tau)} U_n(x,t;\tau) = f_n(y,\tau) \leq u(y,\tau).$$

D'altra parte, utilizzando la stima (1.9) di Γ, si ha

$$0 \leq U_n(z;\tau) \leq c^+ \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^+(z;\xi,\tau)f_n(\xi,\tau)d\xi$$

e quindi, essendo f_n continua e a supporto compatto, dall'espressione esplicita di Γ^+ si deduce immediatamente che

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\sup_{\tau\leq t\leq T} U_n(x,t;\tau)\right) = 0.$$

Per il principio del massimo risulta allora

$$0 \leq U_n(z,\tau) \leq u(z) \tag{2.10}$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^N \times]\tau,T[$. Essendo poi la successione (f_n) monotona crescente, se poniamo

$$U(z,\tau) = \lim_{n\to\infty} U_n(z,\tau), \tag{2.11}$$

dal teorema della convergenza monotona segue $U(z,\tau) \leq u(z)$. Questo prova il Lemma.

Corollario 2.1. *Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in S_I, continua su $\overline{S_I}$. Allora l'integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)u(\xi,0)d\xi$$

converge per ogni $(x,t) \in S_I$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, risulta

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)u(\xi,0)d\xi = u(x,0).$$

Dimostrazione. La prima parte del Corollario segue dalla (2.8). Dimostriamo la seconda uguaglianza. Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$, se $n > |x| + 1$ risulta

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)f_n(\xi,0)d\xi = f_n(x,0) = u(x,0),$$

ove (f_n) è la successione di funzioni introdotta nella prova del lemma precedente. D'altra parte risulta

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\big[u(\xi,0) - f_n(\xi,0)\big]d\xi \leq \\ \leq \lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,n)} \Gamma(x,t;\xi,0)u(\xi,0)d\xi \leq \\ \leq c^+ \lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,n)} \Gamma^+(x,t;\xi,0)u(\xi,0)d\xi = 0, \end{aligned}$$

in quanto, per ogni $k > 0$, esiste $\delta = \delta(k) > 0$ tale che la funzione integranda nell'ultimo membro si maggiora con $e^{-k|\xi|^2}u(\xi,0)$, per ogni $t \in]0,\delta[$; inoltre, per k sufficientemente grande, tale funzione è sommabile su $\mathbb{R}^N$, dal momento che, per ogni $t_0 \in]0,T[$ esistono due costanti positive k_1, k_2 tali che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-k_1|\xi|^2}u(\xi,0)d\xi \leq k_2c^- \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^-(0,t_0;\xi,0)u(\xi,0)d\xi \leq \\ \leq k_2 \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(0,t_0;\xi,0)u(\xi,0)d\xi \leq k_2u(0,t_0). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dimostrazione del Teorema 2.2. Sia $u \geq 0$ soluzione di (2.1). Fissiamo arbitrariamente $s,t \in I, t > s$ ed osserviamo che le costanti k_1 e k_2 che compaiono in (2.12) dipendono con continuità da $t_0 \in]0,T[$. Pertanto, integrando rispetto a $\tau \in]0,s[$, si ottiene

$$u(0,t) \geq \frac{c_0}{s} \int_0^s \Big(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|\xi|^2}u(\xi,\tau)d\xi\Big)d\tau$$

con c_0, c costanti positive che dipendono solo da t e da s. L'asserto segue allora dal Teorema 2.1.

Dalle stime a priori interne enunciate nell'introduzione e dai risultati appena provati segue un primo teorema di rappresentazione. Dimostriamo preliminarmente il seguente risultato:

Proposizione 2.1. *Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di soluzioni di $Lu = 0$ in S_I monotona crescente e localmente limitata. Allora anche la funzione $u = \sup u_n$ è soluzione di $Lu = 0$ in S_I.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che la successione u_n è localmente equicontinua. Sia K un fissato compatto di S_I. Poiché l'algebra di Lie generata da $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_{p_0}}, Y = < x, BD > -\partial_t$ coincide con $\mathbb{R}^{N+1}$, esistono un aperto limitato Ω contenente K e con la chiusura contenuta in S_I ,due costanti positive $c(K) > 0$ e $\alpha \in]0,1[$ tali che, per ogni coppia di punti $z, \zeta \in K$, esistono una costante positiva $\delta \leq c(K)|z-\zeta|^\alpha$ ed un cammino continuo e derivabile a tratti

$$\gamma : [0,\delta] \to \Omega, \quad \gamma(0) = z, \quad \gamma(\delta) = \zeta$$

tale che, per ogni $s \in [0,\delta]$ in cui γ è derivabile, risulta

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{p_0} c_j(s)e_j + c_0(s)\big(B^T\gamma(s) - e_{N+1}\big),$$

ove $|c_j(s)| \leq 1$ per $0 \leq j \leq p_0$. Qui $e_j = (0, ..., 1_j, ..., 0), 1 \leq j \leq N+1$ (per i risultati qui richiamati rinviamo a [NSW]). Allora, indicando con $\widetilde{D}$ il gradiente in $\mathbb{R}^{N+1}$ ed utilizzando le stime interne a priori (1.18), si ha

$$\begin{aligned}
|u(z) - u(\zeta)| &= \left| \int_0^\delta \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) ds \right| \leq \\
&\leq \int_0^\delta \Big| < \widetilde{D}u(\gamma(s)), \gamma'(s) > \Big| ds \leq \\
&\leq \int_0^\delta \Big(\sum_{j=1}^{p_0} |\partial_{x_j} u(\gamma(s))| + |Yu(\gamma(s))| \Big) ds \leq \\
&\leq \delta c_0(\overline{\Omega}) \sup_\Omega |u| \leq \sup_\Omega |u| c_0(\overline{\Omega}) c(K) |z-\zeta|^\alpha.
\end{aligned}$$

Pertanto la successione u_n è equicontinua, e quindi converge uniformemente sui compatti di S_I alla funzione $u = \sup u_n$.

Utilizzando nuovamente le stime a priori interne (1.18) si prova poi direttamente che u è soluzione di $Lu = 0$.

Proposizione 2.2. *Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in S_I, continua su $\overline{S_I}$. Allora*

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\xi,0)u(\xi,0)d\xi. \tag{2.13}$$

Dimostrazione. La successione di funzioni U_n definita in (2.9) costituisce una successione di soluzioni dell'equazione $Lu = 0$ monotona crescente e localmente limitata in S_I. Per la Proposizione 2.1 allora la funzione U definita da (2.11) è soluzione di $Lu = 0$ in S_I. Inoltre, per la (2.10) la funzione $u(z) - U(z;0)$ è non negativa e, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, risulta (cfr. Corollario 2.1) $u(x,0) = U(x,0;0)$. Per il Teorema 2.2, deve valere quindi la (2.13).

§3. Teorema di rappresentazione e Teorema di Fatou. Nel presente paragrafo dimostreremo il seguente:

Teorema 3.1.

(i) *Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ su S_I ($I =]0,T[$). Allora esiste una misura di Borel $\rho \geq 0$ tale che, per una opportuna costante $c > 0$, risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2} d\rho(x) < \infty, \tag{3.1}$$

e, per ogni $z \in S_I$,

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\xi,0)d\rho(\xi). \tag{3.2}$$

(ii) *Per ogni misura di Borel $\rho \geq 0$ verificante (3.1), esiste un intervallo $I =]0,T[$ tale che la funzione u definita da (3.2) è soluzione di $Lu = 0$ in S_I.*

(iii) *Se indichiamo con φ la densità della parte assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) di ρ, si ha*

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x) \tag{3.3}$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

(iv) *Nel senso delle misure risulta*

$$\lim_{t\to 0+} u(\cdot,t) = \rho. \tag{3.4}$$

Osservazione. *Qui e nel seguito, l'espressione "quasi dappertutto" si riferisce sempre alla misura di Lebesgue, che indicheremo sempre con m.*

Dimostrazione - (i). Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in S_I. Per la Proposizione 2.2 si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u\left(x, t+\frac{1}{n}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma\left(x, t+\frac{1}{n}; \xi, \frac{1}{n}\right) u\left(\xi, \frac{1}{n}\right) d\xi.$$

Di conseguenza, utilizzando la stima (1.9) dell'Ipotesi B si prova che, per ogni fissato $t_0 \in I$, esistono $c, c' > 0$ indipendenti da n, tali che

$$u\left(0, t_0 + \frac{1}{n}\right) \geq c^- \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma^-\left(0, t_0 + \frac{1}{n}; \xi, \frac{1}{n}\right) u\left(\xi, \frac{1}{n}\right) d\xi \geq$$

$$\geq c' \int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|\xi|^2} u\left(\xi, \frac{1}{n}\right) d\xi > 0$$

per ogni $n > \frac{1}{T - t_0}$. Pertanto la successione di misure

$$d\mu_n = e^{-c|\xi|^2} u\left(\xi, \frac{1}{n}\right) d\xi,$$

è equilimitata, e quindi, per il teorema di Frostman, esiste una misura di Borel $\mu \geq 0$ tale che, a meno di sottosuccessioni,

$$\mu_n \underset{n \to \infty}{\overset{\text{deb}}{\longrightarrow}} \mu.$$

Per provare la (3.2) osserviamo preliminarmente che, come conseguenza del Lemma 2.1 e delle stime (1.9), esistono due costanti $M > c$ e $T_1 \in I$ tali che, per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, T_1[$,

$$\Gamma\left(x, t + \frac{1}{n}; \xi, \frac{1}{n}\right) \leq c(x, t) e^{-M|\xi|^2} \tag{3.5}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N, n \in \mathbb{N}$. Poiché inoltre risulta

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{c|\xi|^2} \Gamma(x, t; \xi, 0)\, d\mu(\xi)\, (d\mu_n(\xi) - d\mu(\xi)) = 0$$

e

$$e^{c|\xi|^2} \Gamma\left(x, t + \frac{1}{n}; \xi, \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\overset{\xi \in \mathbb{R}^N}{\rightrightarrows}} e^{c|\xi|^2} \Gamma(x, t; \xi, 0),$$

si ha, per la limitatezza della successione μ_n,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{c|\xi|^2} \Gamma\left(x, t + \frac{1}{n}; \xi, \frac{1}{n}\right) d\mu_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{c|\xi|^2} \Gamma(x, t; \xi, 0)\, d\mu(\xi) \tag{3.6}$$

per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T_1[$. Dalla (3.6) segue immediatamente la (3.2) in $\mathbb{R}^N \times [0, T_1[$, se si pone $\rho = e^{c|\xi|^2} \mu$. D'altra parte, se consideriamo un qualunque punto $(x, t) \in S_I$, con $t \geq T_1$, per la Proposizione 2.2 e per la proprietà di riproduzione della soluzione fondamentale, risulta, se $\tau \in]0, T_1[$,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\xi, \tau; \eta, 0) d\rho(\eta) \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \eta, 0) d\rho(\eta).$$

Resta quindi provata la prima parte del Teorema 3.1.
(ii). Osserviamo innanzitutto che, per la (3.5), esiste $T > 0$ tale che la funzione

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)d\rho(\xi)$$

è definita ed è continua su $S_I = \mathbb{R}^N \times]0,T[$. Per verificare che tale funzione è soluzione dell'equazione $Lu = 0$ consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon \in]0,T[$, il problema

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} Lv = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]\varepsilon, T[, \\ v(x,\varepsilon) = h_n(x)u(x,\varepsilon), \end{cases}$$

ove h_n è la funzione definita in (2.4). Essendo il dato iniziale continuo e a supporto compatto, una soluzione $v_{n,\varepsilon}$ di (3.7) si esprime nel modo seguente:

$$v_{n,\varepsilon}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,\varepsilon)h_n(\xi)u(\xi,\varepsilon)d\xi.$$

D'altra parte, utilizzando la proprietà di riproduzione della soluzione fondamentale, risulta

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,\varepsilon)h_n(\xi)u(\xi,\varepsilon)d\xi \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,\varepsilon)u(\xi,\varepsilon)d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\eta,0)d\rho(\eta) = u(x,t). \end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni fissato ε, la successione $v_{n,\varepsilon}$ è monotona crescente e localmente limitata, e quindi, per la Proposizione 2.1, il suo limite v_ε è soluzione di $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, T[$. Inoltre, per il teorema della convergenza monotona, risulta $v_\varepsilon = u$ in $\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, T[$. Data l'arbitrarietà di ε questo prova (ii).

Per dimostrare (3.3) e (3.4) è necessario premettere un risultato riguardante i punti di Lebesgue di una funzione rispetto ad una particolare famiglia di insiemi. Poniamo, per $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\text{(3.8)} \qquad p(v) = \max\left\{|v_j|; 1 \leq j \leq N\right\}$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, t > 0$

$$\text{(3.9)} \qquad C_n(x,t) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N : p\left(D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\xi - E(-t4^{-n})x\right)\right) < 1\right\},$$

Vale allora il seguente lemma di ricoprimento di tipo Vitali, la cui prova è del tutto standard:

Lemma 3.1. *Ogni famiglia finita* $\{C_1, ..., C_h\}$ *di "parallelepipedi" di tipo (3.9) ammette una sottofamiglia disgiunta* $\{C_{i_1}, ..., C_{i_k}\}$ *tale che*

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{h} C_j\right) \leq 3^N \sum_{l=1}^{k} m(C_{i_l}). \tag{3.10}$$

Lemma 3.2. *Sia* s *una misura di Borel su* $\mathbb{R}^N, s \geq 0$ *e sia* $A \subset \mathbb{R}^N$ *un boreliano tale che* $s(A) = 0$. *Allora*

$$\lim_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{s(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))} \right) = 0 \tag{3.11}$$

per quasi ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Fissata una costante positiva a, poniamo

$$B_a = \left\{ x \in A : \limsup_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{s(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))} \right) > a \right\}.$$

Osserviamo che, essendo la funzione $(x, t, n) \mapsto s(C_n(x,t))$ inferiormente semicontinua, l'insieme B_a è un boreliano. Siano poi $r \in]0,1[$ e K un compatto contenuto in B_a. Per ogni $x \in K$ esistono allora $t \in]0, r[$ ed $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$s(C_n(x,t)) > a\, m(C_n(x,t)). \tag{3.12}$$

Osservato poi che ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$ è interno all'insieme $x - E(-t4^{-n})x + C_n(x,t)$, qualunque sia $t > 0$, per la compattezza di K esiste una famiglia finita $\Big\{x_j - E(-t_j 4^{-n_j})x_j + C_{n_j}(x_j, t_j), 1 \leq j \leq h : x_j, t_j, n_j \text{ verificanti } (3.12)\Big\}$ che costituisce un ricoprimento di K. Per il Lemma 3.1 risulta allora

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{h} \left(x_j - E(-t_j 4^{-n_j})x_j + C_{n_j}(x_j, t_j) \right) \right) \leq$$
$$\leq 3^N \sum_{l=1}^{k} m\left(x_{i_l} - E(-t_{i_l} 4^{-n_{i_l}})x_{i_l} + C_{n_{i_l}}(x_{i_l}, t_{i_l}) \right) = 3^N \sum_{l=1}^{k} m\left(C_{n_{i_l}}(x_{i_l}, t_{i_l}) \right).$$

Poiché gli insiemi $C_{n_{i_l}}(x_{i_l}, t_{i_l})$ verificano la (3.12), risulta

$$m(K) < \frac{3^N}{a} \sum_{l=1}^{k} s\left(C_{n_{i_l}}(x_{i_l}, t_{i_l}) \right) \leq \frac{3^N}{a} s(K_\rho), \tag{3.13}$$

con K_ρ intorno compatto di K, di raggio $\rho = \rho(r)$. Osserviamo ora che possiamo scegliere $\rho(r) = O(\sqrt{r})$. Infatti, se $x = x_{i_l} \in K, t = t_{i_l} \in]0, r[, n = n_{i_l} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, per ogni $\xi \in C_n(x,t)$ risulta

$$|\xi - x| \leq |\xi - E(-t4^{-n})x| + |(I - E(-t4^{-n}))x| \leq$$
$$\leq k\sqrt{Nt} + \|I - E(-t4^{-n})\| |x|.$$

Inoltre, dalla definizione di $E(s)$ segue immediatamente che esiste una costante $c > 0$ tale che $\|I - E(-t4^{-n})\| \leq ct$ per ogni $t \in]0, r[$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Resta dunque provato che $|\xi - x| \leq c'\sqrt{t}$ per ogni $\xi \in C_n(x,t)$, con c' costante che dipende solo dal compatto K e da c. Pertanto, poiché $\lim_{\rho \to 0} s(K_\rho) = s(K) = 0$, dalla (3.13), segue che $m(K) = 0$ per ogni compatto K contenuto in B_a. Di conseguenza $m(B_a) = 0$, e quindi vale la (3.11).

Consideriamo ora la decomposizione di Lebesgue della misura ρ:

$$(3.14) \qquad \begin{aligned} \rho &= \mu + s, \\ \mu \ll m \quad & s \perp m, \end{aligned}$$

e sia φ la densità di μ:

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N), \qquad d\mu = \varphi dm.$$

Proposizione 3.1. *Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ risulta*

$$(3.15) \qquad \lim_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{1}{m(C_n(x,t))} \int_{C_n(x,t)} \left(|\varphi(\xi) - \varphi(x)| d\xi + ds(\xi) \right) \right) = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che

$$(3.16) \qquad \lim_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{1}{m(C_n(x,t))} \int_{C_n(x,t)} \left((\varphi(\xi) - \varphi(x)) d\xi + ds(\xi) \right) \right) = 0$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Consideriamo dapprima il contributo dovuto alla misura s. Essendo $s \perp m$, esiste un sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}^N$ tale che $s(B) = 0$ e $m(B') = 0$. Per il Lemma 3.2 risulta allora

$$(3.17) \qquad \lim_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{s(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))} \right) = 0$$

per quasi ogni $x \in B$, e quindi, essendo $m(B') = 0$, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Valutiamo ora il contributo della misura μ nell'integrale in (3.16). Per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$ definiamo una misura non negativa λ ponendo, per ogni boreliano $E \subset \mathbb{R}^N$,

$$\lambda(E) = \int_{E \cap \{\varphi \geq a\}} (\varphi - a) dm.$$

Per il Lemma 3.2 applicato all'insieme $A = \{\varphi < a\}$ si ha allora

$$\lim_{t \to 0+} \left(\sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{\lambda(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))} \right) = 0$$

per quasi ogni $x \in A$. Pertanto, essendo

$$\frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))} \leq a + \frac{\lambda(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))},$$

risulta $\limsup_{t\to 0+}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))}\right) \leq a$ per quasi ogni $x \in A$. Se poniamo infine

$$E_a = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon \varphi(x) < a < \limsup_{t\to 0+}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))}\right)\right\},$$

si ha $m(E_a) = 0$, e quindi

$$\limsup_{t\to 0+}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))}\right) \leq \varphi(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Usando $-\mu$ in luogo di μ e procedendo come sopra, si ottiene poi

$$\liminf_{t\to 0+}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))}\right) \geq \varphi(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, e quindi

$$\lim_{t\to 0+}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\mu(C_n(x,t))}{m(C_n(x,t))}\right) = \varphi(x) \tag{3.18}$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. La (3.17) e la (3.18) implicano la (3.16), da cui, con tecniche del tutto standard, segue il Lemma (cfr. Stein [St], pag. 11).

Dimostrazione del Teorema 3.1 - (iii). Sia x un fissato punto di $\mathbb{R}^N$ per cui vale la Proposizione 3.1. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 \leq \frac{1}{m(C_n(x,t))} \int_{C_n(x,t)} d\nu(\xi) < \varepsilon \tag{3.19}$$

per ogni $t \in]0,\delta[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, ove

$$d\nu(\xi) = |\varphi(\xi) - \varphi(x)|d\xi + ds(\xi).$$

A causa di (3.2) risulta ovviamente

$$u(x,t) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\Big((\varphi(\xi) - \varphi(x))d\xi + ds(\xi)\Big).$$

Per le stime (1.9), dall'espressione esplicita di Γ^+ si deduce che esistono due costanti positive c_1, k tali che

$$\Gamma(x,t;\xi,0) \le c^+\Gamma^+(x,t;\xi,0) \le c_1 t^{-\frac{Q}{2}} e^{-kp^2\left(D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\xi - E(-t)x\right)\right)}.$$

Risulta pertanto

$$\left|u(x,t) - \varphi(x)\right| \le \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-kp^2\left(D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\xi - E(-t)x\right)\right)} d\nu(\xi). \tag{3.20}$$

Fissiamo ora $t \in]0,\delta[$ e poniamo $k_t = \max\left\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 4^n t < \delta\right\}$. Risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-kp^2} d\nu(\xi) &\le \left(\int_{\{p<1\}} + \sum_{j=1}^{k_t} \int_{\{2^{j-1}\le p<2^j\}} + \int_{\left\{p \ge \sqrt{\frac{\delta}{4t}}\right\}} \right) \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-kp^2} d\nu(\xi) = \\ &= I + II + III.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Poiché $\{p < 1\} = C_0(x,t)$ e $m(C_0(x,t)) = 2^N t^{\frac{Q}{2}}$, per la (3.19) risulta

$$I \le 2^N c_1 \varepsilon \tag{3.22}$$

qualunque sia $t \in]0,\delta[$.

Valutiamo ora uno degli addendi di II:

$$\int_{\{2^{j-1}\le p<2^j\}} \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-kp^2} d\nu(\xi) \le \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-k4^{j-1}} \int_{\{p<2^j\}} d\nu(\xi) = \frac{c_2}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-k4^j} \int_{\{p<2^j\}} d\nu(\xi).$$

Osserviamo ora che, dalla definizione di $D(\lambda)$, risulta $p(D(n)v) \ge np(v)$ e $D(\lambda\mu) = D(\lambda)D(\mu)$ per ogni $\lambda, \mu > 0, n \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}^N$. Ne segue, se si pone $s = 4^j t$,

$$\left\{p\left(D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\xi - E(-t)x\right)\right) < 2^j\right\} \subset C_j(x,s).$$

Inoltre, $m(C_j(x,s)) = 2^N s^{\frac{Q}{2}} = 2^{N+jQ} t^{\frac{Q}{2}}$ e, poiché $j \le k_t, s \in]0,\delta[$. Ancora per la (3.19) risulta quindi

$$\int_{\{2^{j-1}\le p<2^j\}} \frac{c_1}{t^{\frac{Q}{2}}} e^{-kp^2} d\nu(\xi) \le \frac{c_2 2^{N+jQ}}{2^{N+jQ} t^{\frac{Q}{2}}} e^{-k4^j} \int_{C_j(x,s)} d\nu(\xi) \le \varepsilon c_3 2^{Qj} e^{-k4^j},$$

per ogni $t \in]0,\delta[$. Pertanto

$$II \le \varepsilon c_3 \sum_{j=1}^{k_t} 2^{Qj} e^{-k4^j} \le \varepsilon c_4, \tag{3.23}$$

uniformemente in $t \in]0,\delta[$, in quanto la serie $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{Qj} e^{-k4^j}$ converge.

Per valutare III osserviamo preliminarmente che sull'insieme $\left\{ p \geq \sqrt{\frac{\delta}{4t}} \right\}$ risulta

$$t^{-\frac{Q}{2}} e^{-\frac{k}{2}p^2} = \frac{p^Q e^{-\frac{k}{2}p^2}}{p^Q t^{\frac{Q}{2}}} \leq c_5 \left(\frac{4}{\delta}\right)^{\frac{Q}{2}}.$$

Di conseguenza,

$$(3.24) \qquad \begin{aligned} III \leq & \frac{c_6}{\delta^{\frac{Q}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{k}{2}p^2} d\nu(\xi) \leq \frac{c_6}{\delta^{\frac{Q}{2}}} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{k}{2}p^2} d\xi + \\ & + \frac{c_6}{\delta^{\frac{Q}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{k}{2}p^2} \Big(\varphi(\xi) d\xi + ds(\xi) \Big) = III_1 + III_2. \end{aligned}$$

Poiché infine

$$\lim_{t \to 0} e^{-\frac{k}{2}p^2 \left(D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\xi - E(-t)x\right)\right)} = 0$$

per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, per il teorema della convergenza dominata si verifica immediatamente che esiste $\delta_0 \in]0,\delta[$ tale che

$$(3.25) \qquad 0 \leq III_1,\ III_2 \leq \varepsilon$$

per ogni $t \in]0,\delta_0[$.

Pertanto, sostituendo nella (3.20) le (3.22), (3.23) e (3.25), resta provato che

$$\lim_{t \to 0+} u(x,t) = \varphi(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ per cui vale la Proposizione 3.1, e quindi, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.
(iv). Per provare la (3.4) bisogna verificare che per ogni funzione $\chi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$(3.26) \qquad \lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) d\rho(x).$$

Utilizzando la (3.2) si ha

$$(3.27) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\chi(x)dx \right) d\rho(\xi),$$

mentre, come conseguenza delle Ipotesi A, risulta

$$\lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\chi(x)dx = \chi(\xi).$$

Per dimostrare la (3.26) basta quindi assicurare che si può portare il limite sotto il segno di integrale nel secondo membro di (3.27). A tal fine è sufficiente provare che esistono $T_0 \in]0, T[$ ed $M > 0$ tali che

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\chi(x)dx \right| \leq M e^{-c|\xi|^2} \tag{3.28}$$

per ogni $t \in]0, T_0[$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, ove c è la costante che figura in (3.1).

Per le stime (1.9) e per il Lemma 2.1, esistono due costanti $c_0 > 0$, che dipende solo dall'operatore L e $k_0 > 0$, che dipende anche dall'insieme (limitato) $\mathrm{supp}(\chi)$ tali che, per ogni $x, \in \mathrm{supp}(\chi)$ e $t \in I$ risulta

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,t;\xi,0) &\leq \frac{c^+}{t^{\frac{Q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} < C^+\eta, \eta >\right) \leq \\
&\leq \frac{k_0}{t^{\frac{Q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{8} < C^+\eta, \eta >\right) \exp\left(-\frac{c_0}{8t}|\xi|^2\right); \\
\eta &= D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x - E(t)\xi).
\end{aligned}$$

Pertanto, posto $T_0 = \frac{c_0}{8c}$, risulta

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,0)\chi(x)dx \right| \leq k_0 \sup|\chi| e^{-c|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^N} t^{-\frac{Q}{2}} \exp\left(-\frac{1}{8} < C^+\eta, \eta >\right) dx,$$

e quindi vale la (3.28), con

$$M = k_0 \sup|\chi| e^{-c|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-<C^+y,y>} dy.$$

Per il teorema della convergenza dominata, resta allora provata la (3.26), e con essa, il Teorema 3.1.

Dalla (3.4) segue immediatamente il seguente

Corollario 3.1. *Sia $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in S_I. Allora, se*

$$u(\cdot\,,t) \underset{t\to 0+}{\overset{\text{deb}}{\longrightarrow}} 0,$$

risulta $u \equiv 0$ in S_I.

§4. **Summary.** We consider a class of degenerate second order parabolic operators of the following type

$$L = \mathrm{div}\,(A(z)D) + < x, BD > -\partial_t, \tag{4.1}$$

where $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, B is a constant $N \times N$ matrix, D, div and $< \cdot , \cdot >$ denote, respectively, the gradient, the divergence and the inner product in $\mathbb{R}^N$. Suppose that, for every $z \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $A_0(z) = A_0^T(z)$ is a $p_0 \times p_0$ matrix such that, for any $z \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$\lambda^{-1} I_{p_0} \leq A_0(z) \leq \lambda I_{p_0}$$

($\lambda > 0$ and I_{p_0} denotes the identity matrix $p_0 \times p_0$), and suppose that, for every $\zeta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$L_\zeta = \operatorname{div}(A(\zeta)D) + < x, BD > - \partial_t$$

is hipoelliptic.

We show that if u is a solution of $Lu = 0$ on $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ and $u(x, 0) = 0$, then each of the following conditions:

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2} |u(x,t)| dx \right) dt < \infty \tag{4.2}$$

for some $c > 0$, or

$$u \geq 0, \tag{4.3}$$

implies $u \equiv 0$ (see Teorema 2.1 and Teorema 2.2).

These results extend the classical parabolic ones (see [K], [A1], [A2], [T]) and relie on some pointwise estimates of the fundamental solution Γ of L, wich was recently proved in [P2] and [P3] (see also [P1]), under a few regularity conditions.

We recall that this method was used by Scornazzani in '82 [S] for the Kolmogorov equation in $\mathbb{R}^3$: $L = \partial_x (a(x, y, t)\partial_x) + x\partial_y - \partial_t$.

As a consequence of Teorema 2.2 we first prove a representation theorem for non-negative solutions of (4.1) in $\overline{S_T} = \mathbb{R}^N \times [0, T]$ (see Proposizione 2.2). Next, using the Frostman selection Theorem, we show that, if u is a non-negative solution of (4.1) in S_T, then there exists a Borel measure $\rho \geq 0$ such that

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t; \xi, 0) d\rho(\xi), \tag{4.4}$$

where Γ denotes the fundamental solution of L. Moreover, for almost every $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{t \to 0+} u(x, t) = \varphi(x), \tag{4.5}$$

where φ denotes the density of ρ with respect the Lebesgue measure, and

$$\lim_{t \to 0+} u(\cdot, t) = \rho \tag{4.6}$$

in the measure sense (see Teorema 3.1).

In order to prove the Fatou type theorem (i.e. (4.5)) we need a Vitali covering lemma (Lemma 3.1) and a definition of Lebesgue set (Proposizione 3.1) for a family of cubes suitably related to the operator (4.1). Then (4.5) follows by an argument introduced by Kato [K].

Finally, as a corollary, we prove a further uniqueness result for non-negative solution of $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ such that $u(\cdot, t) \stackrel{\text{weak}}{\longrightarrow} 0$ as $t \to 0+$ (Corollario 3.1).

BIBLIOGRAFIA

[A1] D. G. Aronson, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 607–694.

[A2] D. G. Aronson, *Non-negative solutions of linear parabolic equations: an addandum*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **25** (1971), 221–228.

[K] M. Kato, *On positive solutions of the heat equation*, Nagoya Math. Journal **30** (1967), 203–207.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **51,4** (1993), 137–171.

[NSW] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[P1] S. Polidoro, *Il metodo della parametrice per operatori di tipo Fokker-Planck*, Seminario di Analisi Matematica, Dip. di Mat. Univ. Bologna, (A.A. 1992/93), Tecnoprint, Bologna, 221–240.

[P2] —, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, (preprint).

[P3] —, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, (preprint).

[S] V. Scornazzani, *Sulle soluzioni non-negative dell'equazione di Kolmogorov*, Rend. Mat. e Appl., VII **2** (1982), 689–709.

[Sh] A. N. Shiryayev (ed.), *Selected works of A. N. Kolmogorov, vol II, Probability theory and mathematical statistics*, Kluver Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London, 1991.

[St] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[T] A. Tychonov, *Théorèmes d'unicité pour l'equation de la chaleur*, Mat. Sb. **42** (1935), 199–216.